

## Diferenciação de produtos em um duopólio utilizando a teoria do consumidor de Lancaster

### *Product differentiation in a duopoly using Lancaster's consumer theory*

DOI: <https://dx.doi.org/10.26694/2764-1392.3917>

João Plínio Juchem Neto<sup>1</sup>

**Resumo:** Neste artigo propomos uma parametrização para as características dos produtos em um modelo de diferenciação de produtos de Lancaster com dois bens e duas características, a fim de estudar o impacto do grau de diferenciação dos produtos no equilíbrio de um duopólio de Cournot. Obtemos o equilíbrio de Cournot do modelo analiticamente e as curvas de reação das firmas numericamente. Quando os custos marginais das firmas são iguais ou próximos, mostramos que quanto mais diferenciados são os produtos, menores são as quantidades e maiores os preços e lucros auferidos no equilíbrio para as duas firmas; quando uma firma apresenta custo marginal positivo muito menor do que a sua concorrente, o lucro da firma mais competitiva, que domina o mercado, é maior quanto mais semelhantes forem os produtos, enquanto que para a firma com menor fatia de mercado ocorre o oposto; por fim, se uma das firmas apresenta custo marginal nulo e a outra não, a firma mais competitiva expulsa a menos competitiva do mercado, situação na qual o seu lucro se torna independente das características do produto.

**Palavras-chave:** Organização industrial; Microeconomia; duopólio de Cournot; diferenciação de produtos; teoria do consumidor de Lancaster.

**Abstract:** In this paper we propose a parametrization for the characteristics of products in a Lancaster model of product differentiation with two goods and two characteristics, in order to study the impact of product differentiation in a Cournot duopoly equilibrium. We obtain the Cournot equilibrium of the model analytically, and the firm's best response curves numerically. When both firms have equal or similar marginal costs, more differentiated products imply in lower quantities, and higher prices and profits in the equilibrium for both firms; when both firms present a greater disparity in terms of positive marginal costs, less differentiated products imply in higher profits for the most competitive firm, the opposite happening with the less competitive one; finally, if one firm have zero marginal cost, it expels its less competitive competitor from the market, and its profits becomes independent from the characteristics of the product.

**Keywords:** Industrial organization; Microeconomics; Cournot duopoly; product differentiation; Lancaster's consumer theory.

*Artigo recebido em 7/2/2023. Aceito em 4/4/2023.*

---

<sup>1</sup> Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor no Departamento de Economia e Relações Internacionais e no Programa de Pós-Graduação em Economia da UFRGS. E-mail: [plinio.juchem@ufrgs.br](mailto:plinio.juchem@ufrgs.br); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7640-6539>

## Introdução

O estudo de mercados com produtos diferenciados é de fundamental importância na área de Organização Industrial, já que é um fato empírico auto evidente que a maior parte das indústrias em uma economia produzem um grande número de bens similares, mas não idênticos. Além disso, geralmente tais indústrias são concentradas em algumas poucas firmas, o que acaba caracterizando estruturas de mercado onde a concorrência é imperfeita, geralmente oligopolista (SHY, 1995).

Uma forma de tratar mercados duopolistas com diferenciação de produtos é através de um modelo de dois bens originalmente proposto por Dixit (1979), cuja derivação a partir de uma função de utilidade quadrática do consumidor implica em funções de demanda lineares com efeitos cruzados dos preços dos produtos. Este modelo permite modelar toda gama de bens, desde bens completamente independentes (ou perfeitamente diferenciados) até bens idênticos (ou substitutos perfeitos), tal como percebidos pelos consumidores, através de um parâmetro do modelo (BELLEFLAMME; PEITZ, 2015). Este é o modelo utilizado pelo livro texto de Microeconomia de Pindyck e Rubinfeld (2006), por exemplo, quando os autores abordam duopólios com concorrência de preços em produtos diferenciados. Utilizando-se deste modelo simplificado, Singh e Vives (1984) analisaram o impacto da diferenciação de produtos nos equilíbrios de duopólios de Cournot (competição em quantidade) e de Bertrand (competição em preços). No caso particular em que os custos de produção de ambas as firmas são nulos e a competição é em quantidade, este modelo implica que uma maior diferenciação de produtos gera maiores preços e lucros no equilíbrio de Cournot, ou seja, uma maior diferenciação dos bens gera maior poder de monopólio para as firmas (SHY, 1995).

Outro modelo de mercado com diferenciação de produtos frequentemente utilizado é o modelo de concorrência monopolística de Dixit-Stiglitz (1977). Diferentemente do modelo discutido acima, o modelo de Dixit-Stiglitz é um modelo de equilíbrio geral, onde os produtos diferenciados entram em uma função de utilidade do consumidor do tipo CES (elasticidade de substituição constante), a qual captura um comportamento do tipo “amor pela variedade”, sendo que o número de variedades de produtos é endógeno ao modelo. Neste caso também temos que, no equilíbrio de longo prazo (lucro econômico nulo), uma maior diferenciação de produtos implica em preços maiores e quantidades menores, embora as curvas de demanda neste caso deixem de ser lineares. Esta formulação foi utilizada na Nova Teoria do Comércio por Krugman (1979), sendo ainda bastante utilizada em modelos da Nova Geografia Econômica (KRUGMAN, 1991; FUJITA *et al.*, 1999; FUJITA; THISSE, 2002; COMBES *et al.*, 2008; BRAKMAN *et al.*, 2009).

Uma abordagem alternativa para tratar de produtos diferenciados menos explorada na literatura, talvez por sua maior complexidade algébrica, é a proposta por Lancaster (1966, 1971) em sua abordagem da teoria do consumidor. Em tal formulação, cada produto é descrito por um vetor de características ou propriedades intrínsecas, de modo que o consumidor deriva sua utilidade observando a quantidade de cada característica nos produtos que consome, e não as quantidades de cada produto, como ocorre na teoria do consumidor tradicional. Tal comportamento por parte do consumidor pode ser verificada no consumo de bens cuja tecnologia muda rapidamente, como computadores e *smartphones* (NICHOLSON; SNYDER, 2012), assim como no consumo de imóveis (ROSEN, 1974) e automóveis (PUU, 2018). Uma das grandes vantagens deste modelo é o fato de permitir modelar concreta e objetivamente, de forma quantitativa, as características intrínsecas de um bem.

Recentemente, o modelo de Lancaster foi utilizado por Puu (2017, 2018) na análise de duopólios dinâmicos, considerando uma função de utilidade de Cobb-Douglas simétrica e dois produtos compostos por duas características. Como neste caso as curvas de reação das firmas não podem ser obtidas analiticamente, o autor lança mão de simulações numéricas, além de propor uma aproximação analítica para tais curvas, utilizando-as para analisar a estabilidade dinâmica do modelo proposto. Além disso, nestes trabalhos o autor constata a existência de soluções cíclicas ou caóticas através de simulações numéricas, além de propor (mas sem explorar as possíveis soluções) um modelo de duopólio onde os duopolistas concorrerem através do design (ou cesta de características) dos produtos (PUU, 2018).

Dada a contextualização acima, o objetivo do presente artigo teórico é propor uma parametrização mais simples para a matriz de características dos produtos  $2 \times 2$  proposta por Puu (2017, 2018), com o intuito de facilitar a análise do impacto do grau de diferenciação dos produtos nos equilíbrios de um duopólio onde as firmas, completamente informadas, tomam decisões da quantidade a produzir de forma simultânea, apresentando custos marginais constantes e custos fixos nulos. A fim de analisar o impacto do grau de diferenciação dos produtos nos valores de equilíbrio de quantidades, preços, lucros, quantidades de características e preços-sombra das características, obtemos analiticamente os equilíbrios de Cournot do modelo, e numericamente, através do *software* MATLAB<sup>®</sup>, as curvas de reação dos duopolistas. Adicionalmente, o presente estudo visa complementar a análise realizada por Puu (2017, 2018), já que o referido autor se aprofundou apenas no comportamento dinâmico do duopólio em seus trabalhos, utilizando para tal processos iterativos com e sem expectativas adaptativas. Além disso, julgamos que a presente análise seja importante no sentido de contribuir para uma melhor compreensão da abordagem de Lancaster para a diferenciação de produtos, dado seu grande potencial de aplicação na modelagem de problemas nas áreas de Organização Industrial, Economia Espacial e Economia Internacional.

O presente artigo está estruturado da seguinte maneira: após esta Introdução contextualizando o trabalho, na Seção 1 resolvemos o problema do consumidor com dois bens e duas características, considerando uma função de utilidade de Cobb-Douglas simétrica e uma parametrização mais simples, em uma variável, das características dos produtos, analisando o impacto do grau de diferenciação dos produtos nas funções de demanda inversa assim obtidas; na Seção 2 tratamos do duopólio com produtos diferenciados utilizando a parametrização proposta acima, obtendo seu equilíbrio de Cournot para os casos em que ambas as firmas possuam custos marginais não nulos (distintos e iguais) e quando uma firma possui custo marginal nulo enquanto a outra não, e analisamos o impacto do grau de diferenciação de produtos nos valores de equilíbrio do modelo; na Seção 3 apresentamos resultados numéricos para diferentes cenários de custos marginais das firmas e graus de diferenciação dos produtos; por fim, na Seção 4 apresentamos as conclusões e perspectivas de pesquisa futura.

## 1 Problema do consumidor

Trataremos aqui de um caso particular do modelo de bens diferenciados proposto por Lancaster (1966, 1971), tal como apresentado por Puu (2017, 2018), onde são considerados dois produtos, cada um podendo possuir duas características. Definindo  $q_1, q_2 \geq 0$  e  $p_1, p_2 \geq 0$  as quantidades e preços dos bens finais 1 e 2, respectivamente,  $x_1, x_2 \geq 0$  as quantidades das propriedades 1 e 2 e  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , a quantidade da característica  $i$  presente em uma unidade do bem  $j$ , temos que as quantidades totais das características, como função das quantidades produzidas de produtos finais, são dadas pelas seguintes funções lineares:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2, \\ x_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2. \end{aligned} \tag{1}$$

As características dos dois produtos podem então ser representadas pela seguinte matriz de características:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

onde sua  $j$ -ésima coluna representa as características possuídas por uma unidade do bem  $j = 1, 2$ , enquanto sua  $i$ -ésima linha informa a quantidade da característica  $i = 1, 2$  presente em uma unidade de cada produto final.

A fim de facilitar a análise a seguir, neste trabalho propomos considerar a seguinte parametrização em uma variável da matriz de características acima (2):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 - a \\ 1 - a & a \end{bmatrix}, \quad (3)$$

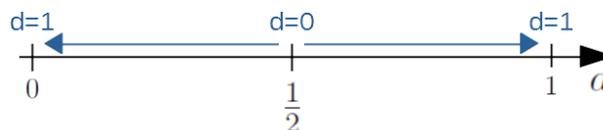
onde o parâmetro  $a \in [0,1]$  representa a proporção da característica 1 presente no bem 1, sendo esta igual à proporção da característica 2 no bem 2. Esta parametrização implica que os dois produtos só serão idênticos (substitutos perfeitos) se  $a = \frac{1}{2}$ , sendo completamente distintos (não-substitutos) se  $a = 0$  (situação em que o produto 1 possui apenas a característica 2 e o produto 2 apenas a característica 1) e se  $a = 1$  (neste caso o bem 1 possui apenas a característica 1, enquanto o bem 2 possui apenas a característica 2); para os outros valores de  $a$  no intervalo  $[0,1]$ , os dois produtos possuem proporções complementares das características 1 e 2.

Podemos definir o grau de diferenciação entre os produtos,  $d$ , como:

$$d = |\det A| = |2a - 1| \in [0,1]. \quad (4)$$

Logo, os produtos serão idênticos se  $d = 0$ , completamente diferentes se  $d = 1$  e mais diferenciados quanto maior for o valor de  $d$  nesta faixa entre 0 e 1. Na Figura 1 apresentamos a relação entre o grau de diferenciação dos produtos,  $d$ , e o parâmetro  $a$ .

Figura 1 – Grau de diferenciação dos produtos,  $d$ , como função do parâmetro  $a$



Fonte: elaborado pelo autor.

Considerando que um consumidor representativo possua renda  $I > 0$  e queira maximizar uma função de utilidade de Cobb-Douglas simétrica, que depende das quantidades totais das características ao invés das quantidades dos produtos finais,  $U(x_1, x_2)$ , temos o seguinte problema a ser resolvido pelo consumidor:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, q_1, q_2} \quad & U = \sqrt{x_1 x_2} \\ \text{s. a.} \quad & x_1 = a q_1 + (1 - a) q_2 \\ & x_2 = (1 - a) q_1 + a q_2 \\ & p_1 q_1 + p_2 q_2 = I \end{aligned} \quad (5)$$

Escrevendo o Lagrangeano deste problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sqrt{x_1 x_2} - \lambda_1 [x_1 - a q_1 - (1 - a) q_2] - \lambda_2 [x_2 - (1 - a) q_1 - a q_2] \\ & - \lambda_3 (p_1 q_1 + p_2 q_2 - I), \end{aligned} \quad (6)$$

temos que as condições de primeira ordem deste problema são dadas pelo sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x_1} &= \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2x_1} - \lambda_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2} &= \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2x_2} - \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{q_1} &= \lambda_1 a + \lambda_2 (1 - a) - \lambda_3 p_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{q_2} &= \lambda_1 (1 - a) + \lambda_2 a - \lambda_3 p_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_1} &= -x_1 + a q_1 + (1 - a) q_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_2} &= -x_2 + (1 - a) q_1 + a q_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_3} &= I - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Seguindo Puu (2018), temos que a solução do sistema acima nos dá as funções demanda dos bens 1 e 2:

$$\begin{aligned} q_1(p_1, p_2, a) &= \frac{I}{2} \left[ \frac{a}{a p_1 - (1 - a) p_2} + \frac{1 - a}{(1 - a) p_1 - a p_2} \right], \\ q_2(p_1, p_2, a) &= \frac{I}{2} \left[ \frac{a}{a p_2 - (1 - a) p_1} + \frac{1 - a}{(1 - a) p_2 - a p_1} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

as respectivas funções de demanda inversa dos bens 1 e 2:

$$\begin{aligned} p_1(q_1, q_2, a) &= \frac{I}{2} \left[ \frac{a}{a q_1 + (1 - a) q_2} + \frac{1 - a}{(1 - a) q_1 + a q_2} \right], \\ p_2(q_1, q_2, a) &= \frac{I}{2} \left[ \frac{1 - a}{a q_1 + (1 - a) q_2} + \frac{a}{(1 - a) q_1 + a q_2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

as funções de demanda das propriedades 1 e 2:

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2, a) &= a q_1(p_1, p_2, a) + (1 - a) q_2(p_1, p_2, a), \\ x_2(p_1, p_2, a) &= (1 - a) q_1(p_1, p_2, a) + a q_2(p_1, p_2, a), \end{aligned} \quad (10)$$

e os preço-sombra imputados às propriedades 1 e 2:

$$\begin{aligned} \lambda_1(q_1, q_2, a) &= \frac{1}{2a - 1} [a p_1(q_1, q_2, a) - (1 - a) p_2(p_1, p_2, q)], \\ \lambda_2(q_1, q_2, a) &= \frac{1}{2a - 1} [a p_2(q_1, q_2, a) - (1 - a) p_1(p_1, p_2, q)], \end{aligned} \quad (11)$$

sendo  $\lambda_3 = 1$ .

Note que os preços-sombra das características (11) não estão bem definidos para o caso em que temos produtos idênticos ( $a = \frac{1}{2}$ ), caso em que a matriz de características  $A$  é singular. Da mesma forma, as funções de demanda dadas por (8) apresentam singularidades, pois os valores nos denominadores dos dois termos entre colchetes podem se anular para certas combinações de preços. As funções de demanda inversa (9), por outro lado, não apresentam esses problemas, estando bem definidas para quaisquer combinações de  $q_1, q_2 > 0$  e  $a \in [0,1]$ . Como na análise do duopólio com produtos diferenciados a ser apresentado na próxima seção utilizaremos as demandas inversas, seguindo Puu (2017, 2018), apresentamos abaixo uma análise mais detalhada delas.

Quando consideramos produtos substitutos perfeitos ( $a = \frac{1}{2}$ ) nas funções de demanda inversa (9), obtemos:

$$p_1(q_1, q_2) = p_2(q_1, q_2) = \frac{I}{q_1 + q_2}.$$

Ou seja, os dois produtos têm o mesmo preço e a quantidade total demandada,  $q_1 + q_2$ , é função inversa deste preço. Por outro lado, se os bens não são substitutos um do outro ( $a = 0$  ou  $a = 1$ ), obtemos:

$$p_1(q_1) = \frac{I}{2q_1}, \quad p_2(q_2) = \frac{I}{2q_2}.$$

onde a quantidade demandada de cada produto depende apenas do seu próprio preço, e vice-versa. Portanto, nestes casos limites obtemos o esperado.

Além disso, tanto de (8), quanto de (9), obtemos que, independentemente de  $a$ :

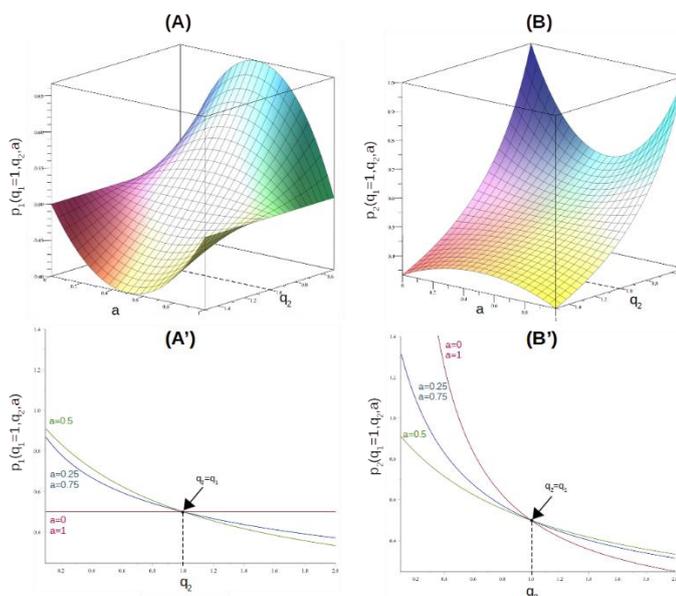
$$q_1 = q_2 = q_c \Leftrightarrow p_1 = p_2 = p_c = \frac{I}{2q_c}. \quad (12)$$

Na Figura 2 apresentamos as funções de demanda inversa considerando uma renda unitária  $I = 1$ , a quantidade  $q_2 = 1$  fixa e  $q_1$  variável. No gráfico (A), em que temos  $p_1(q_1, q_2, a)$  como função da quantidade demandada  $q_1$  e do parâmetro  $a$ , podemos observar que as curvas de demanda inversa pelo bem 1 se tornam mais preço-elásticas na medida em que os dois produtos se tornam mais homogêneos ( $a \rightarrow \frac{1}{2}$ ), o oposto ocorrendo quando eles se tornam mais diferenciados ( $a \rightarrow 0$  ou  $a \rightarrow 1$ ), o que pode ser mais facilmente visualizado no gráfico (A') logo abaixo, para alguns valores representativos de  $a$ . Comportamento oposto verificamos para a função  $p_2(q_1, q_2, a)$  nos gráficos (B) e (B'), sendo a elasticidade-preço cruzada infinita quando os produtos são totalmente diferenciados ( $a = 0$  ou  $a = 1$ ) e mínima quando os produtos são iguais ( $a = \frac{1}{2}$ ) – note que para este último caso as curvas em verde tanto em (A') quanto em (B') são iguais. Na

Figura 3 apresentamos os gráficos correspondentes, mas agora consideramos a quantidade  $q_1 = 1$  fixa e  $q_2$  variável. Aqui fica evidente o comportamento antissimétrico das curvas apresentadas, quando comparadas ao caso analisado acima.

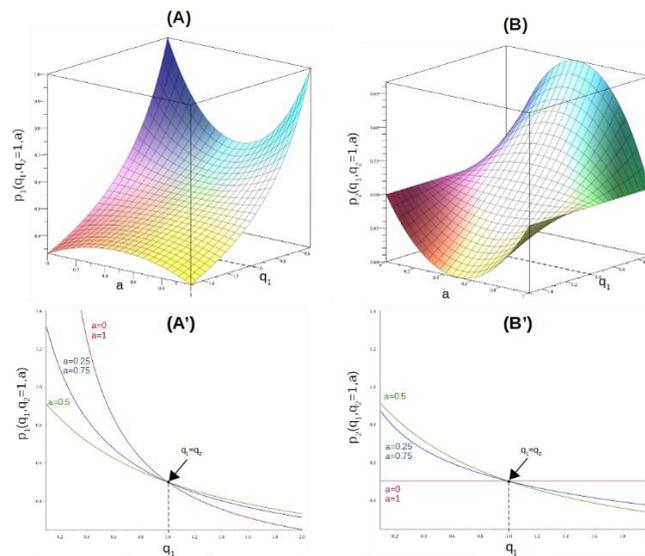
Nestas figuras também podemos ver que, independentemente da diferenciação dos produtos, temos que  $p_1 = p_2 = p_c = \frac{1}{2}$  quando  $q_1 = q_2 = q_c = 1$ , o que ilustra um caso particular do resultado (12). Analisando a Figura 2 (A)-(A'), observamos que: se o preço do produto 1 for alto quando comparado ao  $p_c$  definido acima ( $p_1 > p_c = p_2$ ), então um produto mais diferenciado faz com que o consumidor aumente a quantidade demandada pelo produto 1, ao passo que se o seu preço for baixo ( $p_1 < p_c = p_2$ ), esta relação se inverte, ou seja, um produto mais diferenciado faz com que o consumidor diminua a quantidade demandada dele. Quanto ao efeito cruzado do preço do bem 2 na quantidade demandada pelo bem 1 temos que, observando os gráficos (B) e (B'): se agora  $p_2$  for alto em comparação à  $p_c$  ( $p_2 > p_c = p_1$ ), então quanto mais semelhantes forem os bens (i.e. quanto maior o grau de substitubilidade entre eles) maior é a quantidade demandada pelo bem 1, enquanto que se  $p_2$  for baixo ( $p_2 < p_c = p_1$ ), então a quantidade demandada pelo bem 1 irá aumentar apenas se aumentar a diferenciação dos produtos, caso em que eles são menos substituíveis entre si. Comportamentos similares observamos para a quantidade demandada pelo bem 2 quando fixamos  $q_1 = 1$ , conforme pode ser verificado na Figura 3. Importante notar que qualitativamente estas curvas de demanda apresentam propriedades análogas às da abordagem de concorrência monopolística, conforme Brackman *et al.* (2009, p. 97).

Figura 2 – Funções de demanda inversa com a quantidade  $q_2 = 1$  fixa



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 3 – Funções de demanda inversa com a quantidade  $q_1 = 1$  fixa



Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados acima podem ser verificados analiticamente calculando as derivadas parciais das funções de demanda (8) em relação ao parâmetro de diferenciação do produto,  $a$ :

$$\frac{\partial q_1}{\partial a} = \frac{I}{2} \frac{(2a - 1)(p_1^2 - p_2^2)p_2}{[(a - 1)p_1 + ap_2]^2 [ap_1 + (a - 1)p_2]^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial a} = \frac{I}{2} \frac{(2a - 1)(p_1^2 - p_2^2)p_1}{[(a - 1)p_1 + ap_2]^2 [ap_1 + (a - 1)p_2]^2}.$$

Basta analisarmos o caso  $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  para confirmar a análise acima em relação à Figura 2.

Primeiramente, é fácil ver que  $\frac{\partial q_1}{\partial a} = \frac{\partial q_2}{\partial a} = 0$  sempre que  $p_1 = p_2$ . Em segundo lugar, para  $a$  neste intervalo, (13) implica que:

$$\text{sinal} \left( \frac{\partial q_1}{\partial a} \right) = \text{sinal}(p_1^2 - p_2^2),$$

$$\text{sinal} \left( \frac{\partial q_2}{\partial a} \right) = \text{sinal}(p_2^2 - p_1^2).$$

resultado que é consistente com a análise gráfica realizada nos parágrafos acima.

## 2 Duopólio com produtos diferenciados

Aqui vamos apresentar o modelo de duopólio de Cournot com produtos diferenciados, considerando a parametrização da matriz de características em uma variável apresentada acima.

Supomos que a firma 1 produz apenas o bem 1 e que a firma 2 produz apenas o bem 2, ambas apresentando as seguintes funções de custos lineares, sem custos fixos:

$$\begin{aligned} C_1(q_1) &= c_1 q_1, \\ C_2(q_2) &= c_2 q_2, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $c_1, c_2 \geq 0$  são os custos marginais. Desta forma, as funções lucro das duas firmas são dadas por:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2, a) &= (p_1(q_1, q_2, a) - c_1)q_1, \\ \pi_2(q_1, q_2, a) &= (p_2(q_1, q_2, a) - c_2)q_2, \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $p_1(q_1, q_2, a)$  e  $p_2(q_1, q_2, a)$  são as demandas inversas dos bens 1 e 2, respectivamente, as quais são dadas por (9). Maximizando o lucro das firmas 1 e 2, considerando a quantidade como variável estratégica, obtemos a seguinte equação, que define implicitamente a curva de reação da firma 1,  $q_1^*(q_2)$ :

$$a(1-a)q_2 \left[ \frac{1}{(aq_1+(1-a)q_2)^2} + \frac{1}{((1-a)q_1+aq_2)^2} \right] = \frac{2c_1}{I}. \quad (16)$$

Procedendo da mesma forma em relação à firma 2, temos que sua curva de reação,  $q_2^*(q_1)$ , é dada implicitamente pela equação:

$$a(1-a)q_1 \left[ \frac{1}{(aq_1+(1-a)q_2)^2} + \frac{1}{((1-a)q_1+aq_2)^2} \right] = \frac{2c_2}{I}. \quad (17)$$

Embora não seja possível obter as curvas de reação das firmas analiticamente, podemos resolver o sistema (16) e (17) para  $q_1$  e  $q_2$  e assim obter o equilíbrio de Cournot do duopólio. Supondo inicialmente custos marginais não nulos,  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$ , ao dividir a equação (16) por (17), obtemos a seguinte relação entre  $q_1$  e  $q_2$ :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow q_1 = \frac{c_2}{c_1} q_2 \Leftrightarrow q_2 = \frac{c_1}{c_2} q_1,$$

que, quando substituídas novamente em (16) e (17), resultam no equilíbrio de Cournot ( $q_1^*, q_2^*$ ):

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1^*(a, c_1, c_2) = \frac{I}{2} a(1-a)c_2 \left[ \frac{1}{((1-a)c_1+ac_2)^2} + \frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2} \right], \\ q_2^* &= q_2^*(a, c_1, c_2) = \frac{I}{2} a(1-a)c_1 \left[ \frac{1}{((1-a)c_1+ac_2)^2} + \frac{1}{(ac_1+(1-a)c_2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Substituindo (18) em (9), obtemos os preços de equilíbrio ( $p_1^*, p_2^*$ ):

$$p_1^* = p_1^*(a, c_1, c_2) = \frac{1}{a(1-a)} \frac{\left[ \frac{a}{((1-a)c_1 + ac_2)} + \frac{1-a}{ac_1 + (1-a)c_2} \right]}{\left[ \frac{1}{((1-a)c_1 + ac_2)^2} + \frac{1}{(ac_1 + (1-a)c_2)^2} \right]}. \quad (19)$$

$$p_2^* = p_2^*(a, c_1, c_2) = \frac{1}{a(1-a)} \frac{\left[ \frac{1-a}{((1-a)c_1 + ac_2)} + \frac{a}{ac_1 + (1-a)c_2} \right]}{\left[ \frac{1}{((1-a)c_1 + ac_2)^2} + \frac{1}{(ac_1 + (1-a)c_2)^2} \right]}. \quad (20)$$

Desta forma, os valores de equilíbrio para os lucros dos duopolistas,  $\pi_1^*(a, c_1, c_2)$  e  $\pi_2^*(a, c_1, c_2)$ , podem ser obtidos substituindo  $(q_1^*, q_2^*)$  e  $(p_1^*, p_2^*)$  em (15); para as demandas pelas características,  $x_1^*(a, c_1, c_2)$  e  $x_2^*(a, c_1, c_2)$ , decorrem da substituição de  $(q_1^*, q_2^*)$  em (10); e para os preços-sombra imputados às características,  $\lambda_1^*(a, c_1, c_2)$  e  $\lambda_2^*(a, c_1, c_2)$ , os mesmos são dados pela substituição de  $(p_1^*, p_2^*)$  em (11).

Se ambas as firmas possuem custos marginais iguais, i.e.  $c_1 = c_2 = c$ , então  $q_1^* = q_2^* = q^*$ ,  $p_1^* = p_2^* = p^*$ ,  $\pi_1^* = \pi_2^* = \pi^*$ ,  $x_1^* = x_2^* = x^*$  e  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda^*$ , e as expressões para as soluções de equilíbrio ficam bem mais simples:

$$q^* = \frac{a(1-a)I}{c} = x^*, \quad (21)$$

$$p^* = \frac{1}{2} \frac{c}{a(1-a)} = \lambda^*, \quad (22)$$

$$\pi^* = \frac{I}{2} [1 - 2a(1-a)]. \quad (23)$$

Assim, se considerarmos  $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , temos que quanto maior o valor do parâmetro  $a$ , mais homogêneos são os produtos 1 e 2 produzidos pelas duas firmas (o limite  $a \rightarrow 0$  descreve produtos completamente diferenciados, enquanto  $a \rightarrow \frac{1}{2}$  representa produtos idênticos), temos que:

$$\frac{\partial q^*}{\partial a} = \frac{\partial x^*}{\partial a} = \frac{(1-2a)I}{c} > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial a} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial a} = -\frac{c(1-2a)}{a^2(1-a)^2} < 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = -(1-2a)I < 0, \quad (26)$$

ou seja, quanto mais parecidos entre si forem os produtos 1 e 2, maior será a quantidade produzida de ambos, menor seus preços e menor o lucro auferido por cada firma, conforme esperado, já que neste caso o mercado se aproxima mais da concorrência perfeita. Conclusão semelhante é obtida ao considerar  $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . Este resultado importante pode ser sumarizado na Proposição 1 a seguir.

**Proposição 1** – Se as duas firmas possuem custos marginais não nulos iguais em um duopólio de Cournot com produtos diferenciados, quanto mais diferenciados forem os produtos, maior é o poder de monopólio das duas firmas, sendo menores as quantidades e maiores os preços e lucros de equilíbrio.

Para o caso em que apenas uma das firmas possua custo marginal nulo – sem perda de generalidade podemos considerar  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 = 0$  – a solução do sistema (16) e (17) é dada por:

$$q_1^* = 0, q_2^* = \frac{I}{2c_1} \left[ \frac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)} \right], \quad (27)$$

$$p_1^* = c_1, p_2^* = 2c_1 \left[ \frac{a(1-a)}{a^2 + (1-a)^2} \right], \quad (28)$$

$$\pi_1^* = 0, \pi_2^* = I. \quad (29)$$

Ou seja, neste caso a firma 1 é expulsa do mercado pela firma 2, mais competitiva. Neste caso limite, o lucro da firma 2 independe das características do produto, já que ela se torna, de fato, um monopolista. Quanto à dependência da quantidade e preço de equilíbrio da firma 2 em relação ao grau de desbalanceamento no uso das propriedades 1 e 2 no produto 2, temos que quanto mais balanceado for o uso das duas propriedades, menor é a quantidade e maior o preço de equilíbrio do produto final, o que pode ser verificado derivando parcialmente (27)-(29) em relação ao parâmetro  $a$ . Considerando  $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , obtemos:

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial a} = \frac{(2a-1)I}{2a^2c_2(a-1)^2} < 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial a} = \frac{-2c_2(2a-1)}{(a^2 + (1-a)^2)^2} > 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial a} = 0. \quad (31)$$

Em suma, temos a seguinte proposição para este caso limite.

**Proposição 2** – Se uma das firmas possui custo marginal nulo, enquanto a outra não, em um duopólio de Cournot com produtos diferenciados, então a firma mais eficiente expulsa a outra do mercado. Neste caso o lucro da firma mais eficiente independe das características do produto e quanto mais balanceado for o uso das duas propriedades 1 e 2 no produto final, menor é a quantidade e maior o preço de equilíbrio.

Por fim, se  $c_1 = c_2 = 0$ , o modelo não se aplica, pois neste caso as quantidades produzidas pelas duas firmas tendem ao infinito, e o modelo deixa de funcionar.

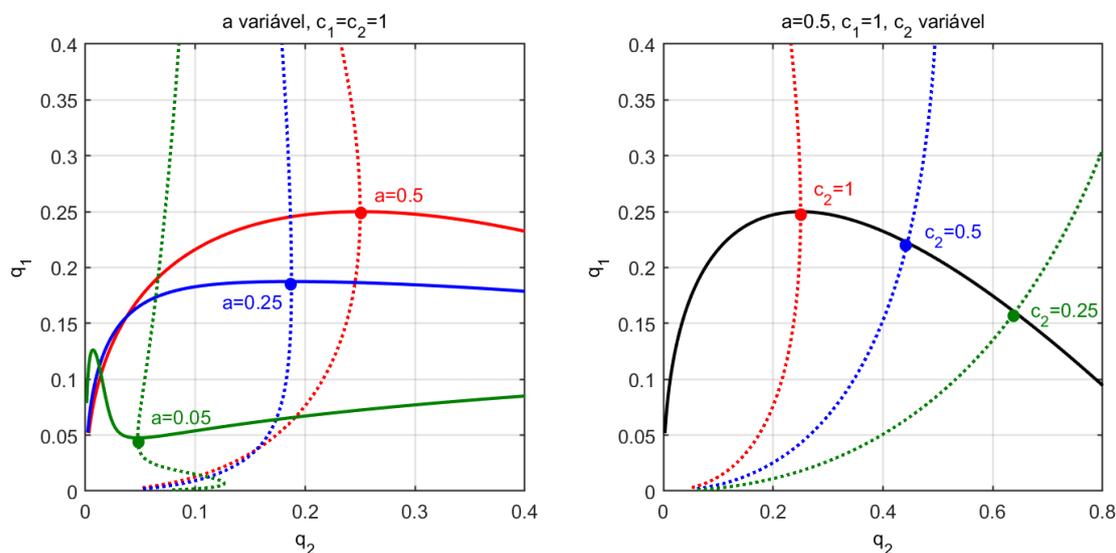
### 3 Resultados numéricos

Sem perda de generalidade, consideramos na análise abaixo uma renda unitária,  $I = 1$ , pois nosso foco é verificar como o equilíbrio de duopólio é afetado pelo grau de diferenciação dos produtos, assim como pelo diferencial entre os custos marginais das duas firmas.

Na Figura 4 apresentamos as curvas de reação das duas firmas, as quais foram obtidas numericamente via equações (16) e (17) utilizando o comando `fzero` do *software* MATLAB® (CHAPRA, 2013). Para os diferentes cenários apresentados, as curvas de reação da firma 1,  $q_1^*(q_2)$ , são representadas pelas linhas sólidas e as curvas de reação da firma 2,  $q_2^*(q_1)$  pelas linhas pontilhadas. Frisa-se que o formato bastante não linear destas curvas, o que contrasta bastante com as curvas de reação lineares implicadas pelo modelo de Dixit (1979), conforme Shy (1996, p.138).

No gráfico da esquerda da Figura 4 destacamos os equilíbrios do duopólio de Cournot para diferentes graus de diferenciação dos produtos, quando ambas as firmas possuem custos marginais iguais a 1. O equilíbrio de Cournot clássico, quando os produtos são idênticos ( $a = \frac{1}{2}$ ) é dado pela intersecção das curvas vermelhas. Além disso, quanto mais diferenciados os produtos (i.e. quanto menor o valor de  $a$  no gráfico), os equilíbrios correspondentes apresentam menores quantidades dos dois bens. No gráfico da direita da Figura 4 apresentamos o caso de Cournot com produtos iguais ( $a = \frac{1}{2}$ ) para custos marginais da firma 2 variáveis, mantendo  $c_1 = 1$  fixo. Observamos aqui que quanto menor  $c_2$  em relação a  $c_1$ , maior é a quantidade de equilíbrio do produto 2 e menor a do produto 1, como esperado.

**Figura 4 – Curvas de reação da firma 1 (linhas sólidas) e da firma 2 (linhas pontilhadas).**  
 À esquerda: ambas as firmas possuem custos marginais unitários e diferentes graus de diferenciação dos produtos.  
 À direita: produtos idênticos, custo marginal da firma 1 unitário fixo e custo marginal da firma 2 variável.



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 5 mostramos as soluções de equilíbrio de duopólio como função do parâmetro  $a$  para diferentes custos marginais da firma 2, novamente mantendo o custo marginal da firma 1 fixo,  $c_1 = 1$ . Na primeira coluna temos os resultados para custos marginais unitários iguais,  $c_1 = c_2 = 1$ . Como podemos ver, neste caso ambas as firmas sempre apresentam os mesmos equilíbrios, os quais apresentam as seguintes características: quanto mais diferenciados são os produtos, menores são as quantidades produzidas por cada firma (assim como a quantidade agregada,  $q_1^* + q_2^*$ , conforme apresentado na Figura 6), e maiores são os preços cobrados e os lucros auferidos das duas firmas, já que ambas as firmas gozam de maior poder de monopólio quanto mais diferenciados forem os produtos, conforme Proposição 1. Estes resultados são consistentes com o obtido com o modelo de Dixit (1979), tal como apresentado em Shy (1995). Além disso, uma maior diferenciação implica em menores quantidades demandadas pelas duas características (já que menos produtos finais são fabricados), sendo maiores seus preços-sombra.

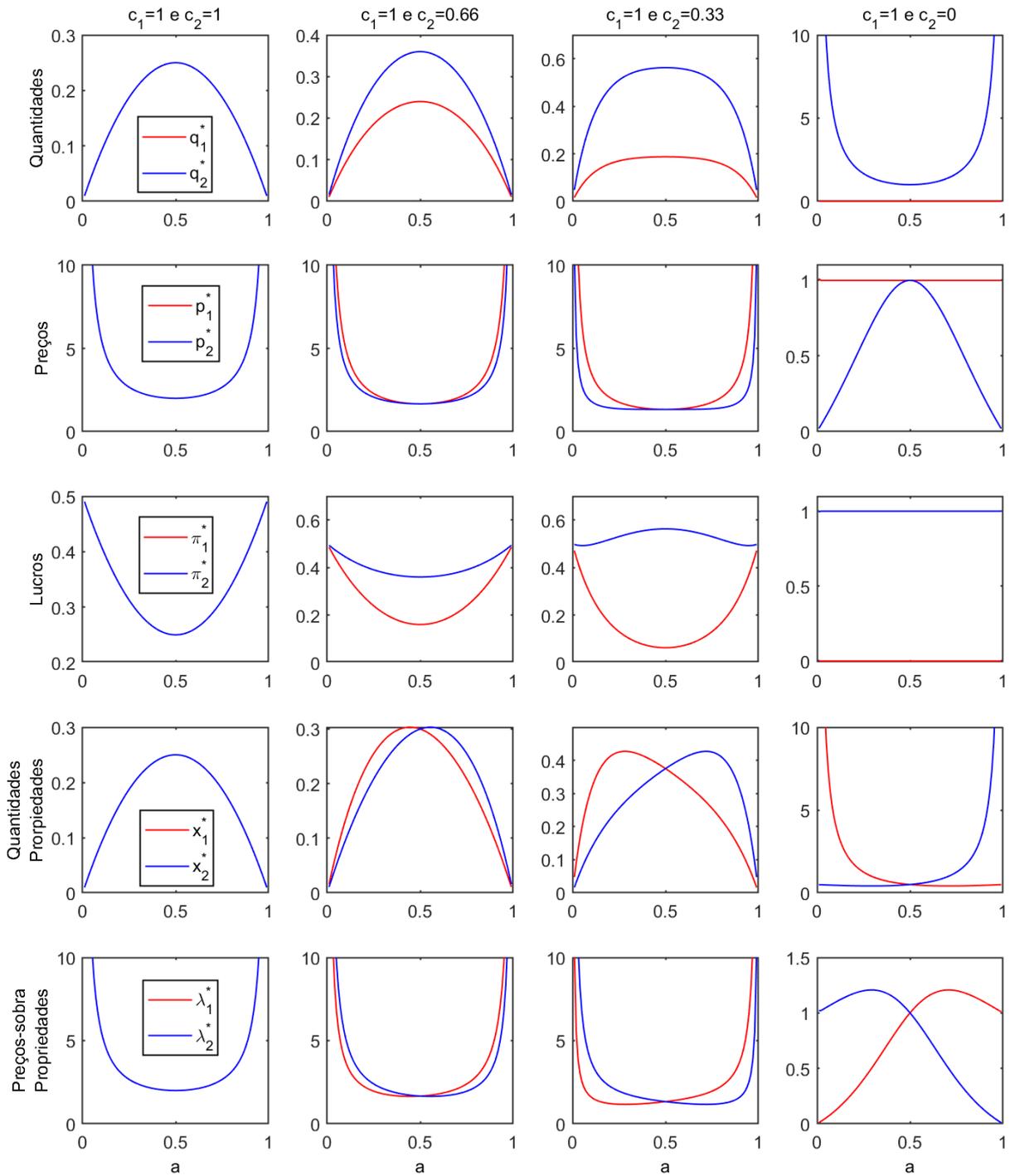
Na segunda coluna da Figura 5, temos que a firma 2 é mais eficiente do que a firma 1, com  $c_2 = 0,66 < 1 = c_1$ . Os resultados mostram, neste caso, que a firma 2 irá produzir uma maior quantidade de produto 2, cobrar um preço menor e auferir um lucro maior do que a firma 1, sendo que a dependência em relação ao grau de diferenciação dos produtos permanece qualitativamente similar ao caso anterior. Entretanto, uma quebra de simetria é verificada na demanda e preços-sombra das características. Por exemplo, para  $a > \frac{1}{2}$ , uma quantidade maior da propriedade 2,  $x_2^*$ , é demandada, pois neste caso o bem 2 – produzido em maior quantidade – é intensivo na propriedade 2, a um preço-sombra menor,  $\lambda_2^*$ , do que da propriedade 1. O oposto ocorre se  $a < \frac{1}{2}$ . Esse comportamento das propriedades permanece o mesmo para as situações a seguir.

Na terceira coluna Figura 5, a firma 2 é ainda mais eficiente do que a firma 1 no caso anterior, com  $c_2 = 0,33 < 1 = c_1$ , aumentando ainda mais a quantidade produzida do bem 2 em relação ao bem 1 e diminuindo menos que proporcionalmente o seu preço quando os produtos são mais homogêneos, de forma que agora o lucro da firma 2 é maior quando os produtos são mais homogêneos, comportamento oposto ao verificado para a firma 1, que detém uma fatia muito menor de mercado. No modelo tratado aqui, este comportamento para o lucro da firma 2 decorre diretamente do comportamento das funções de demanda e de demanda inversa quando  $q_2 \gg q_1$ . Guardadas as devidas diferenças, é interessante observar que este comportamento para o lucro da firma 2 (mais competitiva do ponto de vista de custos) é análogo ao apresentado por Dixit (1979) para o lucro auferido pela firma líder em um duopólio de Stackelberg com custos fixos, ao analisar as barreiras à entrada impostas pela firma líder à concorrente.

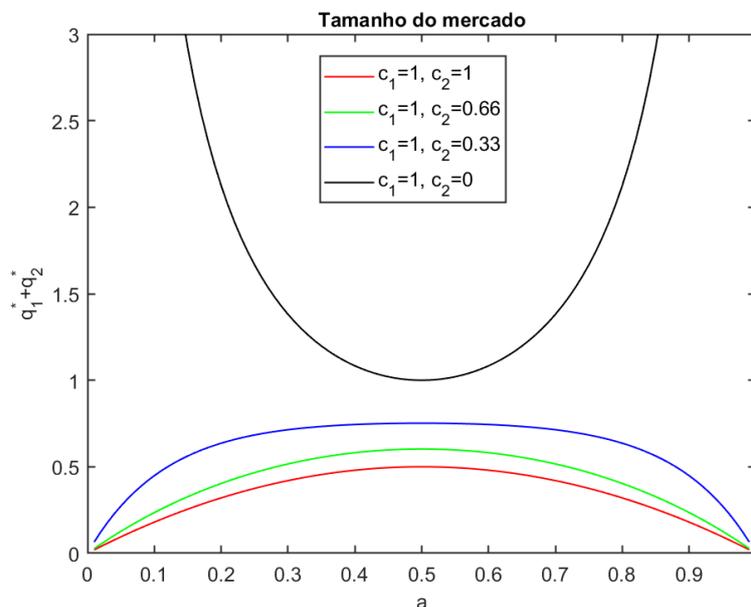
Por fim, na quarta coluna Figura 5 temos o caso limite em que a firma 2 possui custo marginal nulo,  $c_2 = 0 < 1 = c_1$ . Neste caso, apenas a firma 2 permanece no mercado, sendo que agora a quantidade produzida é minimizada quando o produto ofertado possui a mesma proporção das duas características, situação em que o maior preço é cobrado, embora seu lucro não dependa mais da combinação de características empregada no produto. Na Figura 6 observamos que para este caso limite a curva da quantidade agregada muda de formato em relação aos casos anteriores, já que agora ela coincide com a curva de quantidade de equilíbrio da própria firma 2.

Na Figura 6 podemos observar que quanto mais eficiente for a firma 2, maior é o tamanho do mercado,  $q_1^* + q_2^*$ , para todos os graus de diferenciação do produto, que é o resultado esperado.

**Figura 5 – Soluções de equilíbrio do duopólio para diferentes graus de diferenciação de produtos e diferentes valores para o custo marginal da firma 2, mantendo custo marginal da firma 1 unitário fixo**



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 6 – Quantidade agregada de mercado:  $q_1^* + q_2^*$ 

Fonte: elaborado pelo autor.

#### 4 Conclusões e perspectivas

Ao longo deste artigo propusemos uma parametrização mais simples, em uma variável, para as características dos produtos em um modelo de diferenciação de produtos com dois bens e duas características, utilizando a abordagem de Lancaster. A seguir fizemos uma breve análise das funções de demanda inversa implicadas pela resolução do problema do consumidor com dois bens e duas características, considerando uma função de utilidade de Cobb-Douglas simétrica. Na sequência, analisamos um duopólio com produtos diferenciados utilizando a parametrização em uma variável, obtendo analiticamente o equilíbrio de Cournot para os casos em que ambas as firmas possuam custos marginais não nulos (distintos e iguais) e quando uma firma possui custo marginal nulo enquanto a outra não. Também analisamos analiticamente o impacto do grau de diferenciação de produções nos valores de equilíbrio para os casos em que as firmas apresentam custos marginais não nulos e idênticos, e quando uma firma expulsa outra do mercado. Por fim, apresentamos resultados numéricos ilustrando diferentes cenários de custos marginais das firmas, e graus de diferenciação dos produtos.

Em relação às funções de demanda inversa, verificamos a existência de um ponto no qual essas curvas se cruzam para diferentes graus de diferenciação dos produtos – estabelecendo uma situação onde tanto os preços, quanto as quantidades demandadas pelos dois bens são iguais – de forma que se o preço de um bem está acima do preço estabelecido por este ponto, *ceteris paribus*, a sua quantidade demandada aumenta com o grau de diferenciação, o oposto ocorrendo se o seu preço estiver abaixo deste ponto de cruzamento. Além disso, notamos que uma maior diferenciação dos produtos causa uma diminuição na elasticidade-preço da demanda pelos bens e um aumento em sua elasticidade-preço cruzada.

Quanto aos resultados do impacto do grau de diferenciação dos produtos no equilíbrio de duopólio de Cournot, para cenários onde os custos marginais das duas firmas não são muito díspares, temos que quanto mais diferenciados são os produtos, menores são as quantidades produzidas por cada firma (e também a quantidade agregada), maiores os preços cobrados e maiores os lucros auferidos. Para os casos em que uma firma apresenta custo marginal positivo muito menor do que a sua concorrente, o lucro da firma mais competitiva, que domina o mercado, é maior quanto mais semelhantes forem os produtos, enquanto que para a firma com menor fatia de mercado ocorre o oposto. Por fim, se uma das firmas apresenta custo marginal nulo, enquanto a outra não, então a firma mais competitiva expulsa a menos competitiva do mercado, situação na qual o seu lucro se torna independente das características do produto ofertado. Tais resultados são análogos aos encontrados na literatura, em formulações que não tratam as características dos produtos de forma intrínseca como realizado no presente artigo.

Perspectivas de pesquisa futura incluem considerar a parametrização das características em duas variáveis, estudar o comportamento de um duopólio de Stackelberg considerando custos marginais constante assim como custos fixos, analisar duopólios dinâmicos onde a competição também se dá no espaço das características (e aqui a formulação de Lancaster é fundamental por tratar das características dos produtos de forma intrínseca) e estender os resultados para oligopólios com um número maior de firmas, produtos e características.

## Referências

BELLEFLAMME, P.; PEITZ, M. *Industrial Organization – Markets and Strategies. Second Edition*, 2015.

BRAKMAN, S.; GARRETSEN, H.; VAN MARREWIJK, C. *The New Introduction to Geographical Economics. Cambridge University Press*, UK, 2009.

CHAPRA, S. C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas.** 3ª Ed. Porto Alegre, 2013.

COMBES, P. P.; MAYER, T.; THISSE, J. F. **Economic Geography: The Integration of Regions and Nations.** Princeton University Press, UK, 2008.

DIXIT, A. *A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers.* **The Bell Journal of Economics**, v. 10, n. 1, p. 20-32, 1979.

DIXIT, A. K.; STIGLITZ, J. E. *Monopolistic competition and optimum product diversity.* **The American Economic Review**, v. 67, n. 3, p. 297-308, 1977.

FUJITA, M.; KRUGMAN, P.; VENABLES, A. J. **The Spatial Economy.** MIT Press, USA, 1999.  
FUJITA, M.; THISSE, J. F. *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location.* Cambridge University Press, UK, 2002.

KRUGMAN, P. *Increasing returns, monopolistic competition and international trade.* **Journal of International Economics**, v. 9, p. 469-479, 1979.

KRUGMAN, P. *Increasing returns and economic geography.* **Journal of Political Economy**, v. 99, p. 483-499, 1991.

LANCASTER, K. J. *A new approach to consumer theory.* **Journal of Political Economy**, v. 74, n. 2, p. 132-157, 1966.

LANCASTER, K. J. **Consumer Demand: A New Approach.** Columbia University Press, New York, 1971.

NICHOLSON, W.; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles & Extensions.** Twelfth Edition. CENGAGE Learning, USA, 2012.

PINDYCK, R.S.; RUBINFELD, D.L. **Microeconomia.** 6ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

PUU, T. *A new approach to modeling Bertrand duopoly.* **Review of Behavioral Economics**, v. 4, p. 51-67, 2017.

PUU, T. **Disequilibrium Economics: Oligopoly, Trade, and Macrodynamics.** Springer, Cham, Switzerland, 2018.

ROSEN, S. *Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition.* **Journal of Political Economics**, v. 82, n. 1, p. 34-55, 1974.

SHY, O. **Industrial Organization: Theory and Applications.** The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

SINGH, N.; VIVES, X. *Price and quantity competition in a differentiated duopoly.* **The RAND Journal of Economics**, v. 15, n. 4, p. 546-554, 1984.